

# HARMONOGRAMOWANIE CYKLICZNE W PRZEPIYWOWYCH SYSTEMACH PRODUKCYJNYCH

Jarosław PEMPERA

**Streszczenie:** W pracy rozważany jest cykliczny problem przepływowy z ograniczoną pojemnością buforów. Zaproponowano model grafowy oraz sformułowano i udowodniono szereg własności problemu, które opierały się na analizach długości dróg w tym grafie. Własności zostały wykorzystane do konstrukcji efektywnej metody wyznaczania czasu cyklu.

**Słowa kluczowe:** problem przepływowy, harmonogramowanie cykliczne, modelowanie matematyczne.

## 1. Wprowadzenie

Harmonogramowanie cykliczne jest jednym z najefektywniejszych sposobów planowania w systemach transportowych oraz planowania operacyjnego w systemach wytwarzania. W systemach transportowych dominuje w obszarach związanych z przewozem osób: transport kolejowy, transport miejski, międzymiastowy transport autobusowy. Transport cykliczny występuje również w systemach cyklicznego zaopatrywania punktów dystrybucji np. w produkty żywnościowe lub materiały eksploatacyjne. W przypadku systemów wytwarzania, harmonogramowanie cykliczne pozwala na produkowanie w regularnych odstępach czasowych mieszanki produktów odpowiadającej zapotrzebowaniu na produkty. Wpływa to korzystnie zarówno na poziom zapasów w przedsiębiorstwie jak również na poziom zapasów w punktach dystrybucji. Ma to szczególne znaczenie w przypadku produktów o ograniczonym terminie przydatności, łatwo psującej się lub wysoko ocenianej z punktu widzenia świeżości żywności.

W przepływowych systemach produkcyjnych produkcja zorganizowana jest w postaci linii produkcyjnej. Każda maszyna (gniazdo jednorodnych maszyn) odpowiedzialna jest za wykonanie jednego etapu produkcyjnego. W rzeczywistych systemach przepływowych oprócz ograniczeń technologicznych oraz związanych z ograniczoną przepustowością maszyn występują najczęściej dodatkowe ograniczenia. W przemyśle chemicznym oraz metalurgicznym najczęściej spotykanym ograniczeniem jest ograniczenie związane z brakiem możliwości lub limitowanym oczekiwaniem zadań w buforach międzystadialnych. Wymuszone jest to przestrzeganiem technologicznych rygorów czasowych podczas przetwarzania produktów o dynamicznie zmieniających się właściwościami chemicznymi i fizycznymi.

Kolejnym ograniczeniem występującym w wielu asortymentowej produkcji cechującej elastyczne systemy produkcyjne są przebrojenia maszyn. Przebrojenia maszyn polegają na wymianie narzędzi roboczych, zmianie ustawiania maszyn produkcyjnych lub wymianie zasobników z materiałami używanymi do produkcji. W każdym z tych przypadków konieczne jest wstrzymanie obróbki na maszynie na określony czas.

Jednym z najistotniejszych czynników wpływających na wydajność oraz koszty produkcji jest logistyka, która odpowiedzialna jest za transport i magazynowanie

surowców, materiałów oraz produktów wewnątrz systemu produkcyjnego. Obsługa logistyczna wymaga z reguły wykwalifikowanych operatorów. We współczesnych systemach produkcyjnych, w pełni zautomatyzowanych transport produktów realizowany jest najczęściej przy użyciu robotów mobilnych lub stacjonarnych. Ponadto stosuje się zautomatyzowane urządzenia buforowe. Zastosowanie w pełni zautomatyzowanych linii produkcyjnych wymaga opracowania harmonogramów wykonywania operacji technologicznych uwzględniających ograniczenia technologiczne, ograniczenia dostępu do maszyn oraz ograniczenia logistyczne. W pracy rozważane są trzy warianty permutacyjnego problemu przepływowego różniące się pojemnością buforów: (i) bez buforów, (ii) ograniczona pojemność buforów, (iii) nieograniczona pojemność buforów.

## 2. Harmonogramowanie w systemie przepływowym

W przepływowym systemie produkcyjnym park maszynowy składa się z  $m$  maszyn ze zbioru  $M=\{1,\dots,m\}$ . Maszyny rozmieszczone są szeregowo, przy czym każda maszyna odpowiedzialna jest za wykonanie określonego etapu produkcyjnego. W systemie produkcyjnym należy wykonać  $n$  zadań ze zbioru  $J=\{1,\dots,n\}$ . Każde zadanie  $j\in J$  wykonywane jest kolejno na wszystkich. Czas wykonania zadania  $j\in J$  na maszynie  $k\in M$  wynosi  $p_{jk}\geq 0$ . Pomiedzy maszyną  $k$  oraz  $k+1$ ,  $k, k+1\in M$  znajduje się bufor o pojemności  $b_k$  ( $b_k=0$  dla wariantu (i),  $b_k<\infty$  dla wariantu (ii),  $b_k=\infty$  dla wariantu (iii)). W dowolnej chwili maszyna może wykonywać co najwyżej jedno zadanie oraz w dowolnej chwili zadanie może być wykonywane tylko na jednej maszynie. W systemach produkcyjnych z ograniczoną pojemnością buforów może nastąpić efekt blokowania maszyn. Maszyna jest blokowana (produkt znajduje się w przestrzeni roboczej maszyny) w momencie gdy skończy się obróbka zadania oraz bufor wejściowy następnej maszyny jest pełny.

Harmonogramowanie zadań w systemie produkcyjnym polega na określeniu momentów rozpoczęcia i zakończenia wszystkich czynności technologicznych i logistycznych. Niech  $C_{jk}$  ( $S_{jk}$ ) będzie momentem zakończenia (rozpoczęcia) wykonywania zadania  $j\in J$  na maszynie  $k\in M$ . Dodatkowo przez  $C'_{jk}$  oznaczmy moment zwolnienia maszyny  $k, k\in M$  przez zadanie  $j, j\in J$ . Dla dowolnej permutacji  $\pi\in\Pi$ , gdzie  $\Pi$  jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru  $J$ , dopuszczalny harmonogram wykonywania zadań określony przez momenty  $S_{jk}, C_{jk}, C'_{jk}, j\in J, k\in M$  musi spełniać opisane wyżej ograniczenia co formalnie możemy opisać przy pomocy zestawu równań i nierówności (1)–(5).

$$S_{jk}\geq 0, \quad j\in J, k\in M, \quad (1)$$

$$C_{j,k} = S_{j,k} + p_{j,k}, \quad j\in J, k\in M, \quad (2)$$

$$C'_{j,k} \geq C_{j,k}, \quad j\in J, k\in M, \quad (3)$$

$$S_{jk} \geq C'_{j,k-1}, \quad j=1, \dots, n, k=2, \dots, m, \quad (4)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq C'_{\pi(j-1),k}, \quad j=2, \dots, n, k=1, \dots, m, \quad (5)$$

Ograniczenie (1) kotwiczony harmonogram w momencie 0. Ograniczenie (2) wiąże moment rozpoczęcia i zakończenia wykonywania operacji. Kolejne ograniczenie (3)

oznacza, że moment zwolnienia maszyny przez operację nie może być wcześniejszy od momentu zakończenia. Nierówność (4) oznacza, że rozpoczęcie wykonywania zadania na maszynie może rozpocząć się najwcześniej w momencie zwolnienia poprzedniej w ciągu technologicznym maszyny. Dla zadanej kolejności wykonywania zadań na maszynach  $\pi$ , zadanie  $\pi(j)$  stojące na pozycji  $j$  w permutacji  $\pi$  może rozpocząć się na maszynie  $k$ ,  $k \in M$  dopiero po zwolnieniu maszyny przez poprzednie zadanie w tej kolejności (5).

Jak wspomniano wcześniej moment zwolnienia  $C'_{jk}$  maszyny  $k$  przez zadanie  $j$  zależy od momentu, w którym dostępne jest miejsce w buforze. W przypadku systemu przepływowego z nieograniczoną pojemnością buforów (wariant (iii)) wolne miejsce w buforze dostępne jest w każdym momencie, zatem moment zwolnienia maszyny jest równoczesny momentowi zakończenia realizacji zadania na maszynie, tj.  $C'_{jk} = C_{jk}$ .

Zatem w tym przypadku nierówności (4) i (5) możemy zastąpić nierównościami:

$$S_{j,k} \geq C_{j,k-1}, j=1, \dots, n, k=2, \dots, m, \quad (6)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq C_{\pi(j-1),k}, j=2, \dots, n, k=1, \dots, m, \quad (7)$$

Skrajny przypadek, w którym pomiędzy maszynami nie ma buforów (wariant (i)) powoduje blokowanie maszyny  $k$  przez zadanie  $\pi(j)$  aż do chwili rozpoczęcia wykonywania zadania  $\pi(j-1)$  poprzedzającego to zadanie na maszynie następnego  $k+1$ , tj.  $C'_{\pi(j),k} \geq S_{\pi(j-1),k+1}$ . Nierówności (4) i (5) przyjmują postać:

$$S_{j,k} \geq C_{j,k-1}, j=1, \dots, n, k=2, \dots, m, \quad (8)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq S_{\pi(j-1),k+1}, j=2, \dots, n, k=1, \dots, m-1, \quad (9)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq C_{\pi(j-1),k}, j=2, \dots, n, k=1, \dots, m, \quad (10)$$

W przypadku buforów o ograniczonej pojemności (wariant (ii)), w chwili rozpoczęcia wykonywania zadania  $\pi(j)$  na maszynie  $k$  w buforze może znajdować się co najwyżej  $b_k$  zadań. Bufor jest dostępny dla zadania  $\pi(j)$  najwcześniej w momencie  $S_{\pi(j-1-b_k),k+1}$ , tj. w chwili opuszczenia urządzenia buforującego i rozpoczęcia wykonywania zadania  $\pi(j-1-b_k)$  na maszynie  $k+1$ . Zatem, nierówności (4) i (5) przyjmują postać:

$$S_{j,k} \geq C_{j,k-1}, j=1, \dots, n, k=2, \dots, m, \quad (11)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq S_{\pi(j-1-b_k),k+1}, j=2+b_k, \dots, n, k=1, \dots, m-1, \quad (12)$$

$$S_{\pi(j),k} \geq C_{\pi(j-1),k}, j=2, \dots, n, k=1, \dots, m, \quad (13)$$

Harmonogramowanie zadań w przepływowych systemach produkcyjnych jest obiektem badań naukowców od 50. lat ubiegłego wieku. Najwięcej prac poświęconych jest problemowi przepływowemu z nieograniczoną pojemnością buforów. Do najistotniejszych prac poświęconych problemowi przepływowemu bez buforów oraz z buforami o ograniczonej pojemności możemy zaliczyć prace [1-5].

W ogólnym przypadku w problemie przepływowym kolejność wykonywania zadań na każdej z maszyn może być inna. Nie mniej w literaturze najczęściej rozpatruje się

przypadek szczególny jakim jest permutacyjny problem przepływowy, w którym kolejność wykonywania zadań na wszystkich maszynach jest jednakowa. Tego typu systemy przepływowe najczęściej spotykane są w praktyce ze względu na stosunkowo proste sterowanie oraz niewielkie skomplikowanie techniczne urządzeń buforujących i transportujących. Ponadto w pracy [6] pokazano, że w przypadku problemu przepływowego bez buforów, rozwiązania dopuszczalne znajdują się w klasie rozwiązań permutacyjnych.

W cyklicznych systemach produkcyjnych, wykonywanie określonego zbioru operacji powtarzane jest nieskończenie wiele razy (w praktyce wielokrotnie). Celem harmonogramowania cyklicznego jest znalezienie harmonogramu dopuszczalnego (spełniającego wszystkie ograniczenia systemu produkcyjnego), w którym wszystkie zdarzenia w systemie (momenty rozpoczęcia i zakończenia operacji, momenty zwolnienia buforów, itd.) dotyczące dwóch sąsiadujących zbiorów operacji oddalone są o stały okres czasu  $T$ . Okres  $T$  nazywamy czasem cyklu.

Kolejność wykonywania zadań na maszynach dla systemu cyklicznego obejmującego  $z$ -cykli, możemy opisać przy pomocy permutacji  $\alpha=(\alpha(1), \dots, \alpha(zn))$ , gdzie  $\alpha(i+(r-1)n)=\pi(i)$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $r=1, \dots, z$  oraz  $\pi$  jest permutacją określającą kolejność wykonywania pojedynczego zbioru zadań. Harmonogram cykliczny, dla systemu przepływowego z nieograniczoną pojemnością buforów musi spełniać ograniczenia wynikające z procesu produkcyjnego (14–16) oraz omówioną cechę harmonogramu cyklicznego (17).

$$S_{[j],k} \geq 0, j=1, \dots, zn, k=1, \dots, m, \quad (14)$$

$$S_{[j],k} \geq S_{[j],k-1} + p_{[j],k-1}, j=1, \dots, zn, k=2, \dots, m, \quad (15)$$

$$S_{[j],k} \geq S_{[j-1],k} + p_{[j-1],k}, j=2, \dots, zn, k=1, \dots, m, \quad (16)$$

$$S_{[j],k} \geq S_{[j-n],k} + T, j= n+1, \dots, zn, k=1, \dots, m. \quad (17)$$

W celu uproszczenia notacji indeksy dolne w postaci  $\alpha(x)$  skrócono do postaci  $[x]$ , zatem  $S_{[j],k}$  ( $p_{[j],k}$ ) oznacza moment rozpoczęcia (czas wykonania) zadania stojącego na pozycji  $j$  w permutacji  $\alpha$  na maszynie  $k$ .

Nierówności (14–16) wynikają bezpośrednio z przekształceń nierówności (1–5) oraz (6) i (7). System z ograniczoną pojemnością buforów wymaga spełnienia ograniczenia

$$S_{[j],k} \geq S_{[j-1-b_k],k}, j=2+b_k, \dots, zn, k=1, \dots, m-1, \quad (18)$$

które dla systemu bez magazynowania przyjmuje formę

$$S_{[j],k} \geq S_{[j-1],k}, j=2, \dots, zn, k=1, \dots, m-1, \quad (19)$$

Wyznaczenie czasu cyklu dla zadanej kolejności wykonywania zadań polega na wyznaczeniu minimalnej wartości  $T$  dla której spełnione są w/w ograniczenia, natomiast optymalizacja polega na znalezieniu kolejności wykonywania zadań dla których czas cyklu jest najkrótszy.

### 3. Metody wyznaczania czasu cyklu

Istnieje kilka sposobów wyznaczenia czasu cyklu w systemie cyklicznym różniących się złożonością obliczeniową. Najbardziej ogólną jest metoda Howarda [7] o pseudowielomianowej złożoności obliczeniowej. W pracy [8] pokazano, że problem wyznaczenia cyklu dla problemu przepływowego bez magazynowania można sprowadzić do problemu wyznaczenia minimalnego przepływu w sieci, który można wyznaczyć w czasie  $O(n^3 m^3)$  zmodyfikowanym algorytmem z pracy [9].

Czas cyklu można również wyznaczyć przy pomocy wyszukiwania binarnego po  $T$  w odpowiednio skonstruowanym grafie cylindrycznym. Sposób konstruowania takiego grafu dla problemu gniazdowego, który można w łatwy sposób zastosować w przypadku systemów przepływowych z nieograniczoną pojemnością buforów oraz bez buforów, przedstawiono w pracy [10]. Sprawdzenie dopuszczalności  $T$  odbywa się w czasie  $O(n^2 m^2)$  algorytmem Bellmana–Forda.

W przypadku problemu bez magazynowania czas ten można skrócić do  $O(nm^2)$  [11]. Wymienione metody wymagają konstrukcji modeli grafowych lub sieciowych. Jest to jedna z niekorzystnych cech tych metod, ponieważ w przypadku niektórych systemów produkcyjnych konstrukcja takich modeli może być bardzo trudna lub niemożliwa.

### 4. Model grafowy

Dla danej kolejności wykonywania zadań  $\alpha$  w cyklicznym systemie przepływowym definiujemy graf  $G(\alpha)=(V,E)$  ze zbiorem węzłów  $V$  oraz zbiorem skierowanych łuków  $E$ . Zbiór węzłów  $V=\{(0,0)\} \cup N$  składa się ze zbioru  $N=\{1,\dots,zn\} \times \{1,\dots,m\}$  węzłów reprezentujących operacje oraz fikcyjnego węzła  $(0,0)$ . Węzeł  $(j,k) \in N$  reprezentuje operację zadania stojącego na pozycji  $j$  w permutacji  $\alpha$  wykonywaną na maszynie  $k$  i jest obciążony wagą  $p_{[j],k}$ . Węzeł  $(0,0)$  obciążony jest wagą zero. Każdemu węzłowi  $(j,k)$  przyporządkowujemy zdarzenie  $S_{[j],k}$ . Para węzłów  $(x,y),(x',y') \in V$  połączona łukiem  $e=((x,y),(x',y'))$ ,  $e \in E$  o wadze  $w_e$  wymusza następującą zależność pomiędzy zdarzeniami reprezentującymi węzły:

$$S_{[x',y']} \geq S_{[x,y]} + w_e. \quad (20)$$

Zatem, ograniczenie (14) generuje podzbiór łuków

$$E^0 = \bigcup_{j=1}^{zn} \bigcup_{k=1}^m \{(0,0),(j,k)\} \quad (21)$$

każdy z łuków  $e \in E^0$  obciążony jest wagą  $w_e=0$ . Ograniczenie (15) generuje podzbiór łuków technologicznych

$$E^T = \bigcup_{j=1}^{zn} \bigcup_{k=2}^m \{(j,k-1),(j,k)\} \quad (22)$$

każdy z łuków  $e \in E^T$  obciążony jest wagą  $w_e=0$ . Ograniczenie (16) generuje podzbiór łuków reprezentujących kolejność wykonywania zadań na maszynach

$$E^M = \bigcup_{j=2}^{zn} \bigcup_{k=1}^m \{(j-1,k),(j,k)\} \quad (23)$$

każdy z łuków  $e \in E^M$  obciążony jest wagą  $w_e=0$ .

Przed przystąpieniem do opisu łuków generowanych przez ograniczenia związane z blokowaniem zauważmy, że w przypadku nierówności (18)

$$S_{[j],k} \geq (S_{[j-1],k+1} + p_{[j-1],k+1}) - p_{[j-1],k+1}, j=2, \dots, zn, k=1, \dots, m-1. \quad (24)$$

Zatem ograniczenie (18) dla problemu bez buforów generuje zbiór łuków

$$E^B = \bigcup_{j=2}^{zn} \bigcup_{k=2}^m \{(j-1, k+1), (j, k)\} \quad (25)$$

każdy z łuków  $e \in E^B$  obciążony jest wagą  $w_e = -p_{[j-1],k+1}$ . Ten sam zbiór łuków dla systemu z ograniczoną pojemnością buforów zdefiniowany jest następująco

$$E^B = \bigcup_{j=2+b_k}^{zn} \bigcup_{k=2}^m \{(j-1-b_k, k+1), (j, k)\} \quad (26)$$

każdy z łuków  $e \in E^B$  w tym przypadku obciążony jest wagą  $w_e = -p_{[j-1-b_k],k+1}$ .

## 5. Własności problemu

Przed przystąpieniem do sformułowania szeregu własności, wyjaśnimy jaki jest związek pomiędzy modelem grafowym oraz harmonogramem wykonywania zadań. Dowolną ścieżkę łączącą dwa wybrane węzły w grafie  $G(\alpha)$  możemy opisać przy pomocy ciągu węzłów. Długość ścieżki równa jest sumie obciążeń węzłów oraz łuków wchodzących w jej skład. Niech  $u(a,b) = (u_1, \dots, u_l)$ , gdzie  $u_1 = a$ ,  $u_l = b$  oraz  $l$  jest liczbą węzłów w tej ścieżce, będzie najdłuższą ścieżką łączącą węzły  $a = (j_a, k_a)$  oraz  $b = (j_b, k_b)$ . Długość drogi od węzła  $a$  do węzła  $b$  wyraża się wzorem:

$$L_{u_1, u_l} = p_{u_1} + w_{(u_1, u_2)} + p_{u_2} + \dots + p_{u_{l-1}} + w_{(u_{l-1}, u_l)} + p_{u_l}, \quad (27)$$

gdzie  $w_{(x,y)}$  oznacza obciążenie łuku łączącego węzły  $x$  oraz  $y$ , natomiast  $p_x$  jest obciążeniem węzła  $x$ . Ścieżka  $u(a,b)$  odwzorowuje pewien ciąg nierówności (14–19), zatem

$$S_{[j_b], k_b} \geq S_{[j_a], k_a} + D_{a,b}, \quad (28)$$

gdzie  $D_{a,b} = p_{u_1} + w_{(u_1, u_2)} + p_{u_2} + \dots + p_{u_{l-1}} + w_{(u_{l-1}, u_l)} + p_{u_l} - p_{[j_b], k_b}$  oznacza, minimalne opóźnienie rozpoczęcia wykonywania zadania  $\alpha(j_b)$  na maszynie  $k_b$  względem rozpoczęcia wykonywania zadania  $\alpha(j_a)$  na maszynie  $k_a$ .

**Własność 1.** Dla dowolnej permutacji  $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$  oraz permutacji  $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(zn))$  takiej, że  $\alpha(j+in) = \pi(j)$ ,  $i=0, \dots, z-1$ ,  $j=1, \dots, n$ , czas cyklu  $T(\alpha)$  spełnia

$$T(\alpha) \geq \underline{T}(\alpha), \quad \text{gdzie } \underline{T}(\alpha) = \max \{D_{([j],k), ([j+n],k)} : j=1, \dots, (z-1)n, k=1, \dots, m\}. \quad (29)$$

Wartość  $\underline{T}(\alpha)$  zdefiniowana przez (29) określa minimalny okres czasu jaki musi upłynąć pomiędzy momentami rozpoczęcia wykonywania dla co najmniej jednej pary odpowiadających sobie operacji w dwóch sąsiadujących zbiorach. Wynika on bezpośrednio z ograniczeń występujących w systemie produkcyjnym oraz w naturalny sposób jest dolnym ograniczeniem na długość czasu cyklu.

**Własność 2.** Niech  $u(u_1, u_l) = (u_1, \dots, u_l)$ ,  $u_1 = (j_{u_1}, k_{u_1})$ ,  $u_l = (j_{u_l}, k_{u_l})$  będzie najdłuższą ścieżką w  $G(\alpha)$ . Dla każdej ścieżki  $u(u_{1+x}, u_{l+x})$ ,  $x=1, \dots, l-1$ , gdzie  $u_{1+x} = (j_{u_{1+x}}, k_{u_{1+x}})$  zachodzi

$$D_{u_{1+x}, u_{l+x}} = D_{u_1, u_l}. \quad (30)$$

**Dowód.** Na początku przeprowadzimy dowód dla  $x=1$ . Z założeń wynika, że  $D_{u_1, u_l} = p_{u_1} + w_{(u_1, u_2)} + p_{u_2} + w_{(u_2, u_3)} + \dots + p_{u_{l-1}} + w_{(u_{l-1}, u_l)}$ , natomiast  $D_{u_2, u_{l+1}} = p_{u_2} + w_{(u_2, u_3)} + \dots + p_{u_{l-1}} + w_{(u_{l-1}, u_l)} + p_{u_l} + w_{(u_l, u_{l+1})}$ , zatem  $D_{u_1, u_l} - D_{u_2, u_{l+1}} = p_{u_1} + w_{(u_1, u_2)} - p_{u_l} - w_{(u_l, u_{l+1})}$ , ponieważ  $p_{u_l} = p_{u_{l+1}}$  oraz  $w_{(u_1, u_2)} = w_{(u_l, u_{l+1})}$  mamy  $D_{u_1, u_l} - D_{u_2, u_{l+1}} = 0$ , co oznacza, że  $D_{u_1, u_l} = D_{u_2, u_{l+1}}$  i kończy dowód dla  $x=1$ . Łatwo można zauważyć, że w przypadku dowodu  $D_{u_{1+x}, u_{l+x}}$  dla  $x=2, \dots, l-1$  należy wykorzystać ścieżkę  $u(u_{1+x-1}, u_{l+x-1})$ .

Wnioski z Własności 2 znacząco upraszczają wyznaczenie  $\underline{T}$ . Rozpatrzmy przekrój grafu  $G(\alpha)$  rozdzielający węzły reprezentujące dwa sąsiednie zbiory operacji. W celu wyznaczenia wartości  $\underline{T}$  wystarczy wyznaczyć długości najdłuższych dróg przechodzących przez wszystkie krawędzie należące do przekroju lub przez wszystkie węzły do których dochodzą te krawędzie. Liczba krawędzi należących do przekroju jest równa:  $m$  dla problemu przepływowego z nieograniczoną pojemnością,  $2m-1$  dla problemu przepływowego bez buforów oraz  $2m-1+B$ , gdzie  $B = \sum_{i=1}^{m-1} b_i$  dla problemu przepływowego z ograniczoną pojemnością buforów. Liczby węzłów do których dochodzą te łuki wynoszą odpowiednio  $m$ ,  $m$  oraz  $m+B$ .

Długość najdłuższej drogi przechodzącej przez węzły  $(j_x, k_x)$  oraz  $(j_x+n, k_x)$  można wyznaczyć przy pomocy ogólnie znanych algorytmów wyznaczania najdłuższych dróg w grafach. W tym celu łuk  $((0,0), (j_x, k_x))$  należy obciążyć dostatecznie dużą wagą  $L$ , w grafie  $G(\alpha)$  wyznaczyć długość najdłuższej drogi do węzła  $(j_x+n, k_x)$  i odjąć od wyznaczonej długości wartość  $L$ . W rozdziale 6 przedstawiona zostanie znacznie prostsza metoda wyznaczania  $\underline{T}(\alpha)$ , która nie wymaga konstruowania grafu  $G(\alpha)$ .

**Własność 3.** Dla kolejności  $\alpha$ , dolne oszacowanie  $\underline{T}(\alpha)$  jest równe czasowi cyklu tj.  $T(\alpha) = \underline{T}(\alpha)$ .

**Dowód.** W celu udowodnienia Własności 3 wystarczy pokazać, że dla kolejności  $\alpha$  można skonstruować harmonogram cykliczny o długości czasu cyklu  $\underline{T}(\alpha)$ . Oryginalna metoda konstruowania harmonogramu cyklicznego o długości  $T(\alpha)$  została przedstawiona w rozdziale 6.

## 6. Metoda konstruowania harmonogramu cyklicznego

Szczegółowe rozważania dotyczące metody przeprowadzimy dla problemu przepływowego bez buforów. Niech  $\alpha$  będzie kolejnością wykonywania zadań w systemie, natomiast węzeł  $(1,1)$  będzie węzłem dla którego  $D_{(1,1), (1+n,1)} = \underline{T}(\alpha)$ . Węzeł  $(1,1)$  będziemy nazywali źródłem harmonogramu cyklicznego.

Rozważmy graf  $G^l(\alpha)$  powstały z grafu  $G(\alpha)$  przez obciążenie nieobciążonego łuku  $((0,0), (1,1))$  wagą  $L$  ( $L$  – dostatecznie duża liczba). Obciążenie łuku pozwala na

zakotwiczenie źródła harmonogramu w momencie  $L$ . Niech  $S_{[j],k}^l$ ,  $j=1,\dots,n+1$ ,  $k=1,\dots,m$  będą momentami rozpoczęcia wykonywania operacji wyznaczonymi dla  $G^l(\alpha)$ . Z założenia otrzymujemy  $S_{[n+1],1}^l = S_{[1],1}^l + \underline{T}(\alpha)$ . Rozpatrzmy teraz graf  $G^{l+1}(\alpha)$  powstały z grafu  $G^l(\alpha)$  przez obciążenie łuku  $((0,0),(1,l+1))$  wagą  $S_{[1+n],l+1}^l - \underline{T}(\alpha)$ .

Wartości  $S_{[j],k}^{l+1}$ ,  $j=1,\dots,n+1$ ,  $k=1,\dots,m$  wyznaczone dla grafu  $G^l(\alpha)$  spełniają (31–32):

$$S_{[1],l+1}^{l+1} = S_{[1+n],l+1}^{l+1} - \underline{T}(\alpha), \quad (31)$$

$$S_{[1+n],l+1}^{l+1} = S_{[1+n],l+1}^l \quad (32)$$

Równanie (31) oznacza, że moment rozpoczęcia zadania  $\alpha(1)$  na maszynie  $l+1$  następuje dokładnie w momencie  $S_{[1+n],l+1}^l - \underline{T}(\alpha)$ . W lewostronnie dosuniętym harmonogramie, momenty  $S_{[1],l+1}^{l+1}$  oraz  $S_{[1+n],l+1}^l$  mogą być w jednej z dwóch relacji: (i)  $S_{[1],l+1}^{l+1} = S_{[1+n],l+1}^l$ , (ii)  $S_{[1],l+1}^{l+1} \geq S_{[1+n],l+1}^l$ . Przypadek (i) ma miejsce w sytuacji gdy w grafie  $G(\alpha)$  istnieje najdłuższa droga z węzła  $(1,1)$  do węzła  $(1+n,l)$  przechodząca przez węzeł  $(1,l+1)$ , wówczas z Własności 2 mamy  $S_{[1],l+1}^{l+1} = S_{[1+n],l+1}^l = S_{[1+n],l+1}^l - \underline{T}(\alpha)$ . W przypadku (ii) obciążony łuk  $((0,0),(1,l+1))$  przesunął moment rozpoczęcia tego zadania na maszynie  $l+1$  do chwili  $S_{[1+n],l+1}^l - \underline{T}(\alpha)$ .

Z równania (32) wynika, że moment rozpoczęcia wykonywania zadania  $\alpha(1+n)$  na maszynie  $l+1$  nie zmienia się pomimo obciążenia łuku  $((0,0),(1,l+1))$ . Łatwo można zauważyć, że moment  $S_{[1+n],l+1}^{l+1} \geq S_{[1+n],l+1}^l$  tylko wtedy gdy  $D_{(1,l+1),(1+n,l+1)} > \underline{T}(\alpha)$  co jest sprzeczne z definicją  $\underline{T}(\alpha)$ . W ten sam sposób można wyznaczyć obciążenia łuków  $((0,0),(1,k))$ ,  $k=l+2,\dots,m$ .

Rozpatrzmy teraz graf  $G^{l-1}(\alpha)$  powstały z grafu  $G^l(\alpha)$  przez obciążenie łuku  $((0,0),(1,l-1))$  wagą  $S_{[1+n],l-1}^l - \underline{T}(\alpha)$ . W podobny sposób można pokazać, że

$$S_{[1],l-1}^{l-1} = S_{[1+n],l-1}^l - \underline{T}(\alpha), \quad (33)$$

$$S_{[1+n],l-1}^{l-1} = S_{[1+n],l-1}^l \quad (34)$$

oraz wyznaczyć obciążenia łuków  $((0,0),(1,k))$ ,  $k=l-2,\dots,1$ .

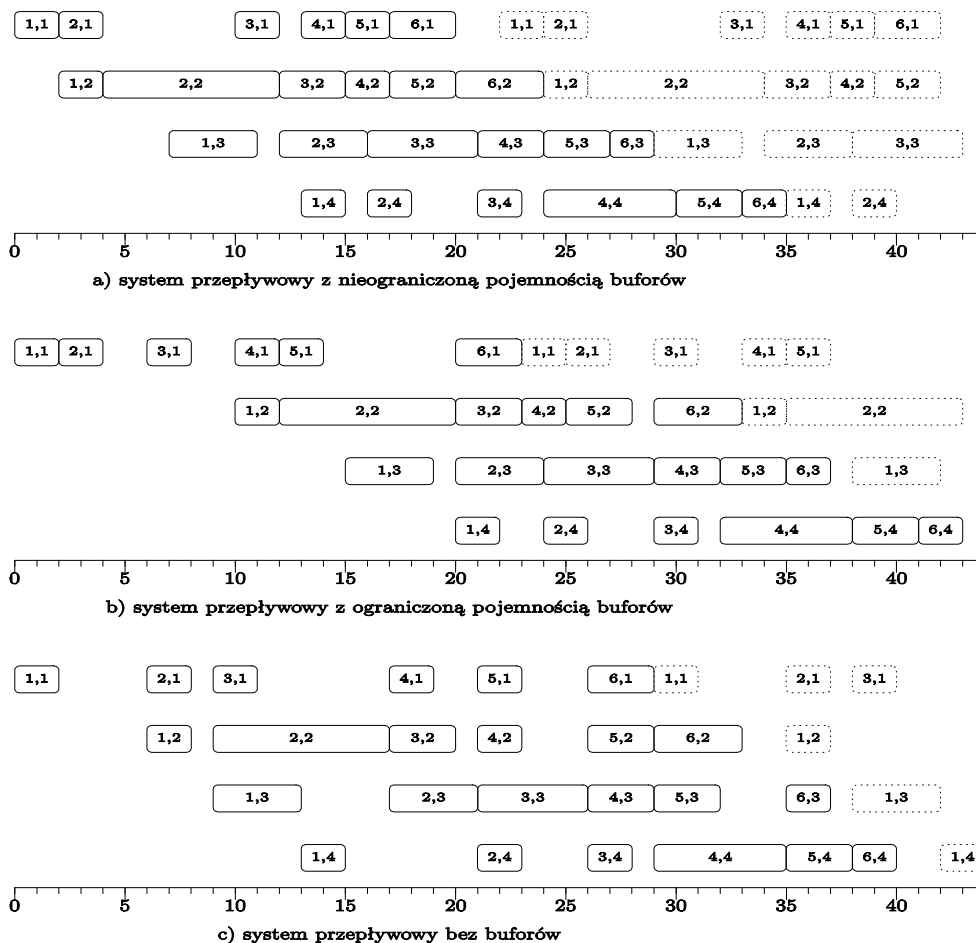
**Własność 3.** Niech graf  $G^*(\alpha)$  będzie grafem  $G(\alpha)$  z łukiem  $((0,0),(1,l))$  obciążonym wagą  $L$ , łukami  $((0,0),(1,k))$ ,  $k=l+1,\dots,m$  obciążonymi wagami  $S_{[1+n],k}^{k-1} - \underline{T}(\alpha)$  oraz łukami  $((0,0),(1,k))$ ,  $k=l-1,\dots,1$  obciążonymi wagami  $S_{[1+n],k}^{k+1} - \underline{T}(\alpha)$ . Graf  $G^*(\alpha)$  generuje harmonogram cykliczny.

**Dowód.** W celu udowodnienia Własności 3 należy pokazać,

$$S_{[j+n],k} = S_{[j],k} + \underline{T}(\alpha) \text{ dla każdego } j=n+1,\dots,2n, k=1,\dots,m. \quad (35)$$

Na podstawie (32–34) otrzymujemy  $S_{[1+n],k} = S_{[1],k} + \underline{T}(\alpha)$  dla każdego  $k=1,\dots,m$ . Ze struktury grafu wynika, że każda droga dochodząca do węzła  $(j+n,k)$ ,  $j=n+2,\dots,2n$ ,  $k=1,\dots,m$  (w tym najdłuższa determinująca moment rozpoczęcia wykonywania zadania na maszynie) przechodzi przez jeden z węzłów  $(1+n,k)$ ,  $k=1,\dots,m$ . Struktura grafu  $G^*(\alpha)$  dla każdego zbioru operacji jest identyczna, zatem ostatecznie otrzymujemy  $S_{[j+n],k} = S_{[j],k} + \underline{T}(\alpha)$  dla każdego  $j=n+2,\dots,2n$ ,  $k=1,\dots,m$ .





Rys 1. Harmonogram cykliczny w przepływowym systemie produkcyjnym

W podobny sposób można wyznaczyć harmonogram cykliczny dla problemu z buforami o ograniczonej pojemności. Jak już wspomniano wcześniej dla zadanej kolejności można wyznaczyć bardzo wiele harmonogramów cyklicznych o różnych cechach. Zaproponowana metoda generuje harmonogram cykliczny, w którym moment rozpoczęcia praktycznie wszystkich zadań jest przesunięty maksymalnie w lewo na osi czasu. Uwaga ta nie dotyczy tylko operacji początkowych, których moment rozpoczęcia został opóźniony w celu uzyskania harmonogramu cyklicznego.

Niestety, system przepływowi z nieograniczoną pojemnością buforów nie posiada tej korzystnej cechy. Spełnienie warunku (32) nie jest możliwe, ponieważ w grafie  $G(\alpha)$  nie istnieje droga z dowolnego węzła reprezentującego operacje wykonywane na maszynach  $1, \dots, m$  do węzła  $(1+n, l-1)$ . Harmonogram cykliczny w takim systemie można uzyskać opisaną metodą jedynie dla operacji wykonywanych na maszynach  $l, \dots, m$ . Dla maszyn  $1, \dots, l-1$  pewnym rozwiązaniem cyklicznym jest wykonywanie operacji według reguły *najpóźniej jak się da*. Momenty rozpoczęcia tych operacji można uzyskać przez

zastosowanie opisanej metody dla grafu  $G'(\alpha')$  skonstruowanego dla permutacji  $\pi'=(\pi(n),\dots,\pi(1))$  z obciążeniem węzłów  $p'_{jk}=p'_{j,m-k+1}$  oraz odpowiadającej tej zmianie, korekcie obciążenia łuków ze zbioru  $E^B$ .

Na Rys. 1 przedstawiono harmonogramy cykliczne dla systemu: a) z buforami o nieograniczonej pojemności, b) z ograniczoną pojemnością buforów przy czym  $b_1=2$ ,  $b_2=1$  oraz  $b_3=1$ , c) bez buforów.

## 7. Efektywne wyznaczanie czasu cyklu

W celu wyznaczenia czasu cyklu w systemie przepływowym z nieograniczoną pojemnością buforów należy wyznaczyć  $m$  wartości opóźnień  $D_{(1,l),(n+1,l)}$  dla  $l=1,\dots,m$ . Podczas wyznaczania wartości  $D_{(1,l),(n+1,l)}$  muszą być spełnione ograniczenia (14–16) oraz dodatkowe ograniczenie

$$S_{[1],l} \geq L, \text{ gdzie } L \text{ jest dostatecznie dużą liczbą.} \quad (36)$$

Najmniejszą wartością  $S_{[n+1],l}$  spełniającą (14–16) oraz (36) można wyznaczyć ze wzoru rekurencyjnego

$$S_{[j],k} = \max \{S_{[j],k-1} + p_{[j],k-1}, S_{[j-1],k} + p_{[j-1],k}\}, \quad (37)$$

gdzie  $j=1,\dots,n+1$ ,  $k=1,\dots,m$  oraz  $p_{[0],k}=0$  dla  $k=1,\dots,m$ ,  $S_{[0],k}=0$  dla  $k \neq l$ ,  $k=1,\dots,m$ ,  $S_{[0],l}=L$ ,  $S_{[j],0}=0$ ,  $p_{[j],0}=0$  dla  $j=1,\dots,n+1$ . Wszystkie wartości  $S_{[j],k}$  dla  $j=1,\dots,n+1$  można wyznaczyć w czasie  $O(nm)$ , natomiast  $D_{(1,l),(n+1,l)} = S_{[n+1],l} - S_{[1],l}$  dla  $l=1,\dots,m$  w czasie  $O(n^2m^2)$ .

W przypadku systemu bez buforów dodatkowo musi być spełnione ograniczenie (19). Zatem wzór (37) przyjmuje postać

$$S_{[j],k} = \max \{S_{[j],k-1} + p_{[j],k-1}, S_{[j-1],k} + p_{[j-1],k}, S_{[j-1],k+1}\}, \quad (38)$$

gdzie warunki brzegowe są identyczne jak powyżej, dodatkowo  $S_{[j],m+1}=0$  dla  $j=0,\dots,n+1$ . Wyznaczenie czasu cyklu można zrealizować w czasie  $O(n^2m^2)$ .

Dla systemu przepływowego z ograniczoną pojemnością buforów wzór (37) przyjmuje postać

$$S_{[j],k} = \max \{S_{[j],k-1} + p_{[j],k-1}, S_{[j-1],k} + p_{[j-1],k}, S_{[j-1-b_k],k+1}\}, \quad (39)$$

gdzie  $j=1,\dots,n+1+mb$ , ( $mb = \max \{b_k: k=1,\dots,m\}$ ),  $k=1,\dots,m$  oraz  $S_{[j],k}=0$ ,  $p_{[j],k}=0$  dla  $k=1,\dots,m$ ,  $j=-mb,\dots,0$ ,  $S_{[j],0}=0$ ,  $p_{[j],0}=0$  dla  $j=1,\dots,m$ . Należy wyznaczyć  $m+B$ ,  $B = \sum_{i=1}^{m-1} b_i$ , wartości  $D_{(x,l),(x+n,l)}$  gdzie  $x=1,\dots,b_k+1$ . Oczywiście  $D_{(x,l),(x+n,l)}$  wymaga zainicjowania  $S_{(x-b_k-1,l)}=L$ . Czas wyznaczenia  $D_{(x,l),(x+n,l)}$  wynosi  $O((n+mb))$ , zatem wyznaczenie czasu cyklu wynosi  $O((n+mb)(m+B))$ .

## 8. Podsumowanie

Praca poświęcona jest harmonogramowaniu cyklicznemu w przepływowym systemie produkcyjnym. Rozważane są trzy przypadki szczególne różniące się pojemnością buforów międzystadialnych: problem przepływowi bez buforów, problem przepływowi z ograniczoną pojemnością buforów oraz problem przepływowi z nieograniczoną pojemnością buforów.

W pracy przedstawiono opis formalny problemów oraz sformułowano cechy i cele hamonogramowania cyklicznego. Zaproponowano model grafowy. Sformułowano i udowodniono szereg własności problemu, które opierały się na analizach specyficznych najdłuższych dróg w tym grafie. Własności zostały wykorzystane do konstrukcji efektywnej metody wyznaczania czasu cyklu.

Zaproponowano również alternatywną metodę wyznaczania czasu cyklu, która nie wymaga konstrukcji grafu oraz implementacji funkcji operujących na tym grafie. Metoda opiera się na znanych dla tych problemów formułach rekurencyjnych, których wykorzystanie wymagało jedynie zmodyfikowania warunków brzegowych.

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/ST7/00102.

### Literatura

1. Smutnicki C., A two-machine permutation flow shop scheduling problems with buffers. *OR Spectrum*, 20 (1998), 229–235.
2. Sawik T., An exact approach for batch scheduling in flexible flow lines with limited intermediate buffers. *Mathematical and Computer Modelling*, 36 (2002), 461–471.
3. Sawik T., Mixed integer programming for scheduling flexible flow lines with limited intermediate buffers. *Mathematical and Computer Modelling*, 31 (2000), 39–52.
4. Leisten R., Flowshop sequencing with limited buffer storage. *International Journal of Production Research*, 28 (1990), 2085–2100.
5. Nowicki E., The permutation flow shop with buffers: A tabu search approach. *European Journal of Operational Research*, 116/1 (1999), 205–219.
6. Grabowski J., Pempera J., Sequencing of jobs in some production system. *European Journal of Operational Research*, 125/3 (2000), 535–550.
7. Kampmeyer T., *Cyclic Scheduling Problems*. Ph. D. Thesis, University Osnabruck, (2006).
8. McCormick M.L., Pinedo M.L., Shenker S., Wolf B., Sequencing in an assembly line with blocking to minimize cycle time. *Operations Research*, 37 (1989), 925–935.
9. Edmonds J., Karp R., Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19 (1972), 248–264.
10. Smutnicki C., Wytwarzanie cykliczne. *Optymalizacja dyskretna w informatyce, automatyce i robotyce*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, (2013), 149–166.
11. Smutnicki C., Smutnicki A., Nowe własności harmonogramów cyklicznych w systemie przepływowym. *AGH Automatyka*, 11/(1–2) (2007), 275–285.

Dr inż. Jarosław Pempera  
Instytut Automatyki, Informatyki i Robotyki  
Politechnika Wrocławska  
50-372 Wrocław, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
tel./fax.: (71) 320-28-34  
e-mail: jaroslaw.pempera@pwr.wroc.pl