

SZEREGI CZASOWE W PLANOWANIU PRODUKCJI W PRZETWÓRSTWIE SPOŻYWCZYM

Artur MACIĄG

Streszczenie: W pracy przedstawiono techniki analizy szeregów czasowych w zastosowaniu do planowania i prognozowania produkcji w przetwórstwie spożywczym. W szczególności wykorzystano analizę trendu z uwzględnianiem wskaźników sezonowości oraz analizę harmoniczną. Informacje o tendencji rozwojowej oraz o sezonowości sprzedaży wykorzystane mogą być w planowaniu wielkości produkcji, zapasów magazynowych oraz czasu remontów w poszczególnych działach przedsiębiorstwa. Analizowano rzeczywiste dane pochodzące z przedsiębiorstw regionu świętokrzyskiego.

Słowa kluczowe: szeregi czasowe, wskaźniki sezonowości, analiza harmoniczna, przetwórstwo spożywcze

1. Wprowadzenie

Województwo świętokrzyskie jest jednym z mniejszych regionów Polski i stosunkowo słabo rozwiniętym. W Strategia Rozwoju Województwa Świętokrzyskiego do roku 2020 „Świętokrzyskie ma charakter przemysłowo-rolniczy, o wysokim stopniu koncentracji tradycyjnych działów przemysłu, związanych z produkcją i obróbką metali, wydobywaniem i przetwórstwem surowców mineralnych oraz produkcją artykułów spożywczych. Charakterystyczny jest bardzo wyraźny podział na przemysłową północ i rolnicze południe, stanowiące zaplecze dla produkcji ekologicznej żywności” [1]. Według tej strategii rozwój przetwórstwa płodów rolnych stanowi szansę rozwoju regionu i wpisuje się w kierunki przekształceń struktury funkcjonalno-przestrzennej województwa. W szczególności przyczyni się do aktywizacji rolnictwa oraz rozwoju obszarów wiejskich. Jest to jeden z priorytetów władz regionu świętokrzyskiego do roku 2020. Wydaje się, że proponowany kierunek rozwoju jest słuszny z uwagi na rolniczy charakter regionu (bliskość dostawców) oraz niezbyt liczną reprezentację przedsiębiorstw z branży przetwórczej w województwie.

Z jednej strony priorytetem działań władz będzie powstawanie nowych przedsiębiorstw z branży przetwórstwa spożywczego oraz przekształcanie i modernizacja gospodarstw rolnych. Z drugiej strony należy utrzymać i modernizować istniejące firmy tej branży. Rosnąca konkurencja na rynku spowodowana mnogością firm branży przetwórczej w innych rejonach Polski ale również za granicą wymusza na działających przedsiębiorstwach coraz efektywniejsze i racjonalne gospodarowanie. Firmy zmuszone są do efektywnego wykorzystania posiadanych zasobów. Minimalizacja kosztów produkcji i przechowywania oraz prawidłowe planowanie remontów linii produkcyjnych wymusza przewidywanie wielkości popytu na poszczególne wyroby. Analizy szeregów czasowych dostarcza takich narzędzi. W szczególności w oparciu o znany przebieg zjawiska w przeszłości możliwe jest uzyskanie cennych informacji wymienionych niżej.

- **Trend sprzedaży.** Znajomość tendencji rozwojowe produktów pozwala podjąć decyzje dotyczące zaniechania lub wzrostu wielkości produkcji poszczególnych wyrobów. Rodzaj trendu zestawiać można z prowadzonymi działaniami

promocyjnymi, co pozwala ocenić ich skuteczność lub konieczność ich zintensyfikowania.

- **Wskaźniki sezonowości.** Stanowią one bardzo cenną informację, które okresy (miesiące, kwartały, półrocza) charakteryzują się dużym popytem. Należy wtedy zwiększyć produkcję do odpowiedniego poziomu. W okresach niskiego popytu zaplanować można remonty. Dodatkowo znajomość sezonowości oraz wielkości popytu w poszczególnych okresach pozwala racjonalnie planować dostawy, zatrudnienie oraz zapasy magazynowe.
- **Cykle koniunkturalne.** Każda branża posiada własny cykl koniunkturalny, trwający od kilku do kilkunastu lat. Koniunkturalnością może też charakteryzować się sprzedaż pojedynczych wyrobów. Informacje tego typu pozwalają lepiej dostosować się do wymogów rynku. Określenie cykli koniunkturalnych wymaga jednak znajomości zachowania się zjawiska w stosunkowo długim czasie.
- **Prognozy.** Nie sposób przecenić wagi prawidłowo oszacowanej wielkości sprzedaży. Należy mieć świadomość, że każda prognoza obarczona jest pewnym błędem. Dlatego z punktu widzenia wyboru metody prognostycznej ważna jest ocena błędu prognoz (zwykle wyznaczany jest błąd *ex ante*). Duże wartości błędów są podstawą do zmiany metody. Małe błędy pozwalają nabrać zaufania do wybranej techniki prognostycznej.

2. Narzędzia analizy szeregów czasowych

Szereg czasowy to realizacja procesu stochastycznego o dziedzinie dyskretnej. Wartości szeregu to wartości pewnej zmiennej losowej. W praktyce przyjmuje się, że szereg czasowy jest funkcją określoną na kolejnych chwilach czasu. Zwyczajowo wartości szeregu czasowego oznacza się jako $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots$, gdzie t – czas określający kolejne dni, miesiące, kwartały itp.

2.1. Składowe szeregu czasowego

Ważnym elementem analizy szeregu czasowego jest jego dekompozycja, czyli rozkład na składowe, które wymieniono niżej.

- **Stały poziomie zmiennej.** Występuje wówczas, gdy wartości szeregu oscylują wokół pewnej stałej wartości.
- **Trend (tendencja) f_t .** Jest to jednokierunkowa zmiana wartości szeregu. Trend może być wzrostowy lub spadkowy. W praktyce trudnym zadaniem bywa określenie postaci trendu. Może on być liniowy lub nieliniowy.
- **Wahania sezonowe s_t .** Są to okresowe zmiany wartości szeregu o okresie nie przekraczającym jednego roku.
- **Wahania cykliczne (koniunkturalne) c_t .** to okresowe zmiany wartości szeregu o charakterze długookresowym.
- **Składowa przypadkowa (losowa) e_t .** Składowa losowa występująca praktycznie w każdym rzeczywistym szeregu czasowym. Związane jest to z występowaniem czynników przypadkowych i nieprzewidywalnych.

Możliwe jest przyjęcie jednego z dwóch modeli szeregu czasowego: addytywnego lub multiplikatywnego. **Model addytywny** ma postać:

$$y_t = f_t + s_t + c_t + e_t, \quad (1)$$

natomiast model **multiplikatywny**:

$$y_t = f_t \cdot s_t \cdot c_t \cdot e_t. \quad (2)$$

2.2. Wskaźniki sezonowości

Przed wyznaczeniem wskaźników sezonowości należy rozstrzygnąć czy stosujemy model addytywny czy multiplikatywny. W przypadku w przybliżeniu stałej amplitudy wahań dla każdej fazy cyklu wykorzystuje się model addytywny. Gdy stałe są w przybliżeniu względne odchylenie od trendu stosuje się model multiplikatywny. W pierwszej kolejności eliminuje się z szeregu trend. Nowy szereg czasowy u oscylujący wokół stałej uzyskuje się w modelu addytywnym wykorzystując formułę [2, 3, 4]:

$$u_t = y_t - f_t, \quad (3)$$

natomiast w modelu multiplikatywnego formułę:

$$u_t = y_t / f_t. \quad (4)$$

Następnie wyznacza się **surowe wskaźniki sezonowości**, zgodnie ze wzorem:

$$s_i^s = \frac{1}{c} \sum_{j=0}^{c-1} u_{i+j \cdot d}, \quad i=1, \dots, d, \quad (5)$$

gdzie c jest liczbą wystąpień danej fazy w całym szeregu natomiast d jest liczbą faz w cyklu. Średnia addytywnych wskaźników sezonowości powinna wynosić zero, natomiast multiplikatywnych jeden. Jeśli tak nie jest należy wyznaczyć **oczyszczone wskaźniki sezonowości**. Dla modelu addytywnego korzysta się ze wzoru:

$$s_i = s_i^s - \bar{s}^s, \quad (6)$$

natomiast dla modelu multiplikatywnego ze wzoru:

$$s_i = \frac{s_i^s}{\bar{s}^s}, \quad (7)$$

gdzie $\bar{s}^s = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d s_i^s$ jest średnią arytmetyczną surowych wskaźników sezonowości.

Wskaźniki sezonowości w połączeniu z funkcją trendu pozwalają na wyznaczenie prognoz (w tym prognoz wygasłych będących przybliżeniem oryginalnego szeregu czasowego). Dla modelu addytywnego korzysta się ze wzoru:

$$y_{it}^* = f_{it} + s_i, \quad i=1, \dots, d, \quad (8)$$

natomiast dla modelu multiplikatywnym ze wzoru:

$$y_{it}^* = f_{it} \cdot s_i, \quad i=1, \dots, d \quad (9)$$

Dla funkcji trendu dodano drugi wskaźnik i dla zaznaczenia, którą fazę cyklu rozważamy.

2.3. Analiza harmoniczna

Analiza harmoniczna znana również jako **analiza Fourierska** jest uniwersalnym narzędziem pozwalającym wyodrębnić wahania okresowe w szeregu czasowym. W przeciwieństwie do wskaźników sezonowości nie zakłada się a priori długości cyklu. W praktyce w szeregu czasowym wystąpić mogą jednocześnie wahania o cyklu rocznym, kwartalnym, miesięcznym itd. Uzyskane harmoniczne pozwalają odpowiedzieć na pytanie jakiego rodzaju okresowość występuje w analizowanym szeregu czasowym.

W przypadku oscylacji zmiennej prognozowanej wokół średniego poziomu α_0 przyjmuje się model szeregu w postaci [2, 3, 4]:

$$\hat{y}_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[\alpha_i \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right) + \beta_i \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right) \right]. \quad (10)$$

We wzorze (10) i jest numerem harmonicznej, natomiast „daszek” nad zmienną y oznacza, że wyznaczamy wartości teoretyczne (model). Możliwe jest wyznaczenie $n/2$ harmonicznych (dla nieparzystej liczby wyrazów pomija się pierwszą obserwację). Pierwsza harmoniczna ($i=1$) ma okres równy długości całego przedziału czasu, druga ma okres równy połowie długości tego przedziału, trzecia jednej trzeciej itd.. Estymatory parametrów α_i oraz β_i modelu (10) mają postać:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, & \hat{\alpha}_i &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right), \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, & \hat{\alpha}_{n/2} &= 0, \\ \hat{\beta}_i &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right), \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, & \hat{\beta}_{n/2} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\pi t), \end{aligned} \quad (11)$$

Uwzględnienie w modelu (10) wszystkich harmonicznych nie jest celowe. Po pierwsze dlatego, że model taki byłby mało czytelny. Po drugie niektóre harmoniczne mają bardzo małe amplitudy i w praktyce nie wpływają w sposób istotny na uzyskiwane wartości teoretyczne. Z tych powodów w praktyce uwzględnia się jedynie te harmoniczne, których **udział w całkowitej wariancji** jest największy. Udział ten wyznacza się dla i – tej harmonicznej ze wzoru:

$$\omega_i = \frac{\hat{\alpha}_i^2 + \hat{\beta}_i^2}{2s^2} \quad \text{dla } i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad \text{oraz} \quad \omega_{n/2} = \frac{\hat{\alpha}_{n/2}^2 + \hat{\beta}_{n/2}^2}{s^2}, \quad (12)$$

gdzie: s^2 jest wariancją zmiennej prognozowanej y . Suma wszystkich ω_i wznosi jeden. Decyzja, które harmoniczne uwzględnić w modelu należy do prognosty.

Dla szeregów czasowych z trendem przyjmuje się model w postaci [2, 3, 4]:

$$y_t = f_t + \sum_{i=1}^{n/2} \left[\alpha_i \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right) + \beta_i \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right) \right] \quad (13)$$

gdzie f_t – trend. Estymatory parametrów α_i oraz β_i wyznacza się dla nowej zmiennej z ze wzorów (11) po wcześniejszym wyeliminowaniu trendu zgodnie z formułą:

$$z_t = y_t - f_t. \quad (14)$$

Dla szereg czasowego (14) jest $\alpha_0=0$. Również w przypadku występowania trendu wybiera się do modelu jedynie te harmoniczne, których udział w całkowitej wariancji jest największy. Modele (10) oraz (13) umożliwiają prognozowanie.

3. Przykłady

Ilustracji opisanych powyżej narzędzi posłużą przykłady analiz danych dotyczących sprzedaży trzech wyrobów spożywczych. Dane uzyskano z dwóch przedsiębiorstw branży spożywczej działających w regionie świętokrzyskim. Pierwsza zajmuje się przetwórstwem owocowo-warzywnym, druga natomiast przetwórstwem mleka. Z uwagi na poufność danych nazwy firm nie są podawane. Ponadto rzeczywiste dane dotyczące sprzedaży wyrobów zostały przeskalowane. Tym samym nie odzwierciedlają one rzeczywistej sprzedaży a jedynie tendencje oraz wahania. Celem analiz jest wykrycie trendów, sezonowości i w konsekwencji wyznaczenie prognoz sprzedaży produktów.

3.1. Sprzedaż pierwszego produktu

Pierwszym analizowanym produktem jest musztarda. Jej głównym składnikiem jest gorczyca oraz ocet. Gorczyca jest rośliną oleistą niewymagającą dobrych warunków klimatyczno-glebowych. Może być zatem uprawiana w województwie świętokrzyskim, gdzie jakość gleb jest wyższa niż średnia krajowa. Gorczyca uważana jest za rośliną mającą działanie lecznicze. Prym w spożyciu musztardy wiodą Francuzi (około 1,5kg rocznie na osobę). Tabela 1 zawiera dane dotyczące miesięcznej sprzedaży musztardy w trzech kolejnych latach.

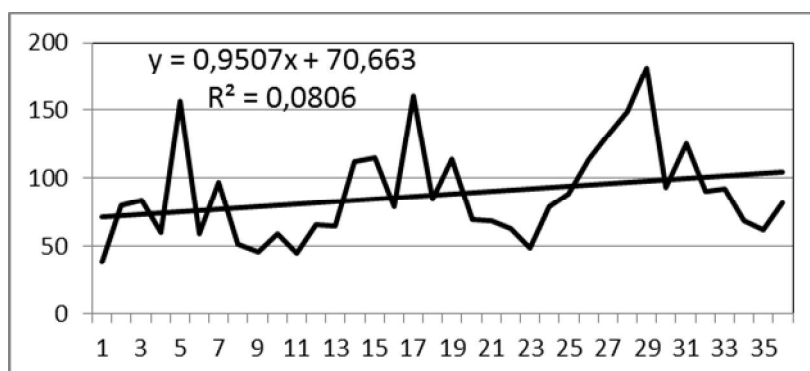
Tab. 1. Miesięczna sprzedaż musztardy

Miesiąc	1	2	3	4	5	6
Sprzedaż	38,13	79,5	83,5	59,8	156,4	58,7
Miesiąc	7	8	9	10	11	12
Sprzedaż	97,4	51,08	45,78	58,77	45,29	65,7
Miesiąc	13	14	15	16	17	18
Sprzedaż	65,14	112,4	115,1	79	160,1	84,7
Miesiąc	19	20	21	22	23	24
Sprzedaż	114	69,17	68,77	62,77	49,16	79,2
Miesiąc	25	26	27	28	29	30
Sprzedaż	88,74	114,12	132	149	180,74	92,74
Miesiąc	31	32	33	34	35	36
Sprzedaż	125,16	90,48	92,14	68,17	62,03	82,15

Rysunek 1 pokazuje sprzedaż musztardy w kolejnych miesiącach. Widoczna jest duża zmienność sprzedaży przy liniowym trendzie nieznacznie rosnącym opisanym funkcją:

$$y_t = 70,663 + 0,9507t. \quad (15)$$

Niska wartość współczynnika determinacji R^2 wynika z dużych wahań sprzedaży. Wahania te mają charakter periodyczny. Obserwuje się miesięczne wahania o cyklu rocznym.



Rys 1. Sprzedaż musztardy: szereg czasowy oraz trend liniowy

Zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 2.2 wyznaczono po wyeliminowaniu trendu addytywne wskaźniki sezonowości. Zamieszczono je w tabeli w 2.

Tab. 2. Miesięczne wskaźniki sezonowości sprzedaży musztardy

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI
Wskaźnik	-19,0	18,0	25,3	10,1	78,9	-9,1
Miesiąc	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Wskaźnik	23,5	-19,4	-21,7	-28,3	-40,4	-17,8

Sprzedaż musztardy powyżej średniej obserwuje się od lutego do maja oraz w lipcu. Sprzedaż musztardy w maju. Miesiącem o najwyższej sprzedaży jest maj. Od sierpnia do grudnia występuje sprzedaż poniżej średniej miesięcznej przy czym najniższa sprzedaż obserwowana jest w listopadzie.

Dokonując analizy harmonicznej wykorzystujemy model w postaci (13) przyjmując trend liniowy opisany wzorem (15). Szereg czasowy ma długość $n=36$ obserwacji. Możliwe jest zatem wyznaczenie osiemnastu harmonicznych. Estymatory parametrów modelu wyznaczone po wyeliminowaniu trendu ze wzorów (11) oraz udział harmonicznych w całkowitej wariancji przedstawiono w tabeli 3. Największy wpływ na zachowanie się zmiennej prognozowanej mają harmoniczne: trzecia (okres roczny), piętnasta (okres 36/15 miesięcy), osiemnasta (okres półroczny) oraz dwunasta (okres kwartalny). Po uwzględnieniu tych harmonicznych oraz liniowej funkcji trendu uzyskujemy model:

$$y_t = 70,663 + 0,9507t + 25,186 \sin\left(\frac{2\pi}{36} 3t\right) - 24,883 \cos\left(\frac{2\pi}{36} 3t\right) - 7,36 \sin\left(\frac{2\pi}{36} 12t\right) - 5,828 \cos\left(\frac{2\pi}{36} 12t\right) + 3,285 \sin\left(\frac{2\pi}{36} 15t\right) + 21,816 \cos\left(\frac{2\pi}{36} 15t\right) - 7,757 \cos\left(\frac{2\pi}{36} 18t\right)$$

Tab. 3. Estymatory parametrów modelu oraz udział harmonicznych w wariancji

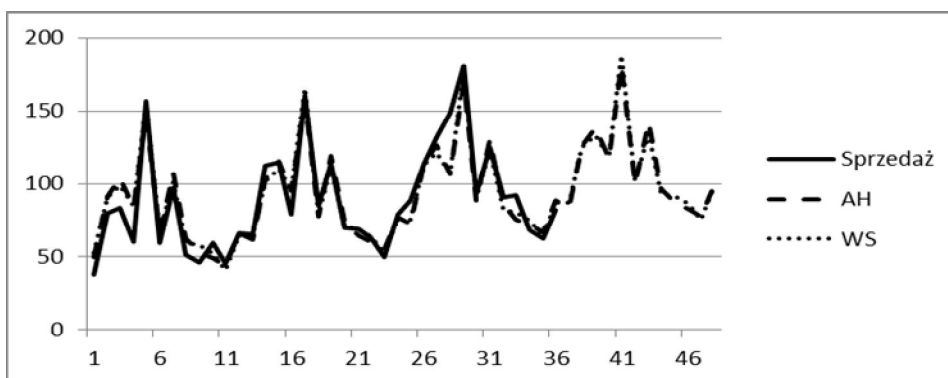
Harmoniczna	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	ω_i
1	-6,866	-2,935	0,025
2	-5,310	-5,366	0,026
3	25,186	-24,883	0,563
4	0,424	0,952	0,000
5	-4,390	0,442	0,009
6	-2,487	0,156	0,003
7	0,752	-1,453	0,001
8	5,488	0,922	0,014
9	4,967	-1,300	0,012
10	-3,322	3,261	0,010
11	-0,628	-3,645	0,006
12	-7,360	-5,828	0,040
13	-1,208	2,660	0,004
14	-3,970	2,695	0,010
15	3,285	21,816	0,219
16	1,741	-1,942	0,003
17	1,539	-0,532	0,001
18	0,000	-7,757	0,054

Wykorzystując wskaźniki sezonowości oraz składowe harmoniczne w połączeniu z liniową funkcją trendu możliwe jest wyznaczenia prognoz na kolejne miesiące. Tabela 4 przedstawia prognozy na pierwsze półrocze czwartego roku.

Tab. 4. Prognozy na pierwsze półrocze czwartego roku

Miesiąc	37	38	39	40	41	42
Model liniowy	105,84	106,79	107,74	108,69	109,64	110,59
Wskaźniki sezonowości	86,82	124,82	133,02	118,75	188,56	101,53
Analiza harmoniczna	83,93	125,75	138,14	117,97	181,36	100,07

Rysunek 2 przedstawia sprzedaż musztardy (linia ciągła), oraz wartości teoretyczne (prognozy wygasłe) oraz prognozowane na cały kolejny rok.



Rys 2. Sprzedaż musztardy: szereg czasowy oraz prognozy

Widoczne jest dobre dopasowanie wartości teoretycznych do rzeczywistych. Średni błąd ex post prognoz wygasłych wynosi dla analizy harmonicznej 11,74 natomiast dla modelu ze wskaźnikami sezonowości 11,03.

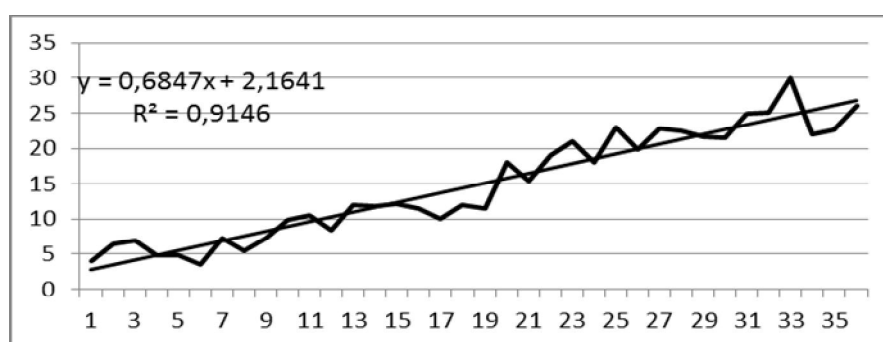
3.2. Sprzedaż drugiego produktu

Kolejnym produktem jest pewien rodzaj gatunkowego, dojrzewającego sera żółtego. Do niedawna sery takie sprowadzane były głównie z zagranicy. W ostatnich latach obserwuje się dynamiczny wzrost produkcji dobrych jakościowo serów dojrzewających przez mleczarnie polskie. W szczególności produkcję takiego sera prowadzi jedna z mleczarni regionu świętokrzyskiego. Surowiec do produkcji serów w regionie pozyskiwany jest od okolicznych producentów mleka. Tabela 5 zawiera dane dotyczące miesięcznej sprzedaży tego sera żółtego w trzech kolejnych latach.

Tab. 5. Miesięczna sprzedaż sera

Miesiąc	1	2	3	4	5	6
Sprzedaż	4	6,5	7	4,8	4,9	3,5
Miesiąc	7	8	9	10	11	12
Sprzedaż	7,2	5,5	7,3	9,9	10,5	8,5
Miesiąc	13	14	15	16	17	18
Sprzedaż	12	11,8	12,2	11,5	10	12
Miesiąc	19	20	21	22	23	24
Sprzedaż	11,5	18	15,5	19	21	18
Miesiąc	25	26	27	28	29	30
Sprzedaż	23	19,8	22,8	22,5	21,7	21,5
Miesiąc	31	32	33	34	35	36
Sprzedaż	24,9	25	30	22	22,6	26

Rysunek 3 pokazuje wielkość sprzedaży sera w kolejnych miesiącach. Widoczny jest wyraźnie rosnący trend sprzedaży. W ciągu trzech lat wielkość sprzedaży zwiększyła się czterokrotnie. Wysoka wartość współczynnika determinacji R^2 wskazuje na prawie liniowy wzrost sprzedaży. Obserwuje się miesięczne wahania, jednak bez pogłębionej analizy trudno odgadnąć charakter tych oscylacji.



Rys 3. Sprzedaż sera: szereg czasowy oraz trend liniowy

Podobnie jak wcześniej w pierwszej kolejności wyznaczono addytywne wskaźniki sezonowości, które zamieszczono w tabeli 6.

Tab. 6. Miesięczne wskaźniki sezonowości sprzedaży sera

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI
Wskaźnik	1,94	0,95	1,57	-0,19	-1,60	-2,15
Miesiąc	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Wskaźnik	-0,64	0,31	1,06	-0,26	0,12	-1,10

Uwzględniając wartości prognozowanej zmiennej należy uznać, że uzyskane wskaźniki sezonowości są na stosunkowo niskim poziomie. Sprzedaż sera powyżej średniego trendu obserwuje się od stycznia do marca oraz w sierpniu, wrześniu i listopadzie. Od kwietnia do lipca oraz w październiku i grudniu występuje sprzedaż poniżej średniego trendu. Najniższy stosunkowo popyt obserwuje się w czerwcu.

Estymatory parametrów modelu (13) dla harmonicznych, których udział w całkowitej wariancji jest na poziomie przynajmniej 0,05 zamieszczono w tabeli 7.

Tab. 7. Estymatory wybranych parametrów modelu oraz udział harmonicznych w całkowitej wariancji

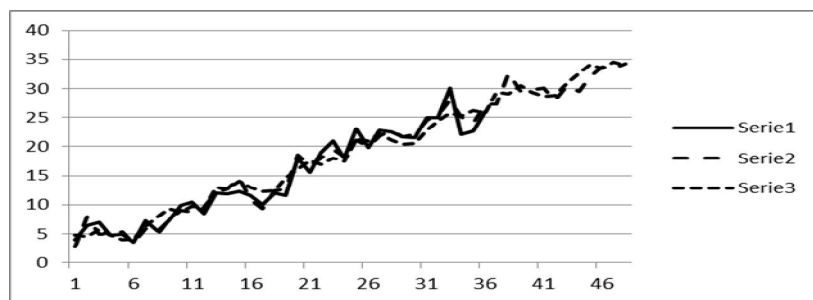
Harmoniczna	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	ω_i
1	-0,794786	0,465073	0,09
2	0,3604749	-0,58876	0,05
3	0,2588094	0,844313	0,08
4	0,5641728	-0,90708	0,12
6	0,6470261	-1,06245	0,16
8	0,7461179	-0,14229	0,06
14	-0,913911	0,601845	0,13
16	-0,248749	0,66202	0,05

Nie uzyskano wyraźnie dominującej harmonicznej. Największy wpływ na wahania cykliczne ma szósta harmoniczna (okres półroczny). Po uwzględnieniu harmonicznych zamieszczonych w tabeli 7 wyznaczono model oraz prognozy, które zamieszczono w tabeli 8. Pokazano tam również prognozy wynikające z modelu liniowego oraz z wykorzystaniem wskaźników sezonowości.

Tab. 8. Prognozy na pierwsze półrocze czwartego roku

Miesiąc	37	38	39	40	41	42
Model liniowy	27,5	28,2	28,9	29,6	30,2	30,9
Wskaźniki sezonowości	29,4	29,1	30,4	29,4	28,6	28,8
Analiza harmoniczna	27,3	32,5	29,5	29,7	30,0	28,0

Rysunek 4 przedstawia sprzedaż sera (linia ciągła), oraz wartości teoretyczne (prognozy wygasłe) oraz prognozowane na cały kolejny rok.



Rys 4. Sprzedaż sera: szereg czasowy oraz prognozy

Dla modelu liniowego średni błąd ex post prognoz wygasłych wynosi 2,17. Dla analizy harmonicznej jest on na poziomie 1,20 a dla modelu ze wskaźnikami sezonowości jest równy 1,81. Model harmoniczny najlepiej oddaje charakter rozważanego szeregu.

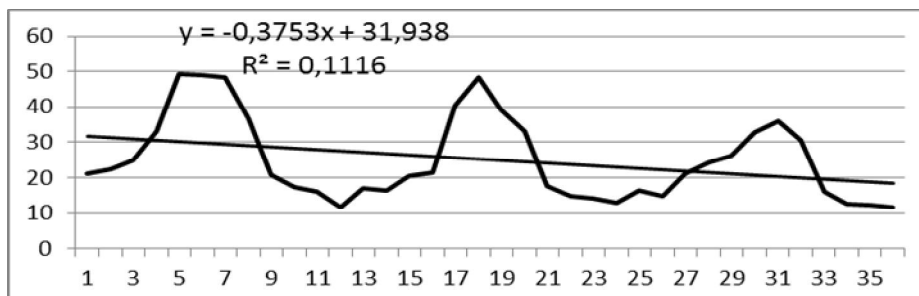
3.3. Sprzedaż trzeciego produktu

Trzecim analizowanym produktem jest maślanka, która jest ubocznym produktem przy produkcji masła. Jest ona bogata w lecytynę, wapń, sole mineralne i białko, zawierając przy tym mało tłuszczu. Tabela 9 zawiera dane dotyczące miesięcznej sprzedaży maślanki przez jedną z mleczarni regionu świętokrzyskiego.

Tab. 9. Miesięczna sprzedaż maślanki

Miesiąc	1	2	3	4	5	6
Sprzedaż	21,1	22,2	24,9	33	49,3	48,9
Miesiąc	7	8	9	10	11	12
Sprzedaż	48,4	36,5	20,9	17,3	15,9	11,5
Miesiąc	13	14	15	16	17	18
Sprzedaż	16,9	16,4	20,4	21,3	40,5	48,2
Miesiąc	19	20	21	22	23	24
Sprzedaż	39,1	33	17,7	14,9	14,1	13
Miesiąc	25	26	27	28	29	30
Sprzedaż	16,3	14,7	21	24,1	26,3	32,9
Miesiąc	31	32	33	34	35	36
Sprzedaż	36,1	30,7	16	12,5	12,1	11,7

Rysunek 5 pokazuje wielkość sprzedaży maślanki w kolejnych miesiącach. Widoczna jest wyraźna tendencja malejąca sprzedaży przy dużych wahaniami periodycznych. Wahania te są przyczyną niskiej wartości współczynnika determinacji.



Rys 5. Sprzedaż musztardy: szereg czasowy oraz trend liniowy

Addytywne wskaźniki sezonowości sprzedaży maślanki zamieszczono w tabeli 10.

Tab. 10. Miesięczne wskaźniki sezonowości sprzedaży maślanki

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI
Wskaźnik	-8,96	-8,92	-4,21	0,20	13,14	18,15
Miesiąc	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Wskaźnik	16,39	8,97	-5,86	-8,78	-9,27	-10,86

Sprzedaż maślanki powyżej średniego trendu obserwuje się od kwietnia do sierpnia przy maksimum przypadającym na czerwiec. W pozostałych miesiącach sprzedaż jest na poziomie poniżej średniego trendu przy czym najniższa notowana jest w grudniu.

Estymatory parametrów modelu dla harmonicznych, których udział w całkowitej wariancji jest na poziomie przynajmniej 0,05 zamieszczono w tabeli 11.

Tab. 11. Estymatory parametrów modelu oraz udział harmonicznych w całkowitej wariancji

Harmoniczna	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	ω_i
3	-1,255226	-13,9692	0,81
6	1,7603722	4,54476	0,10

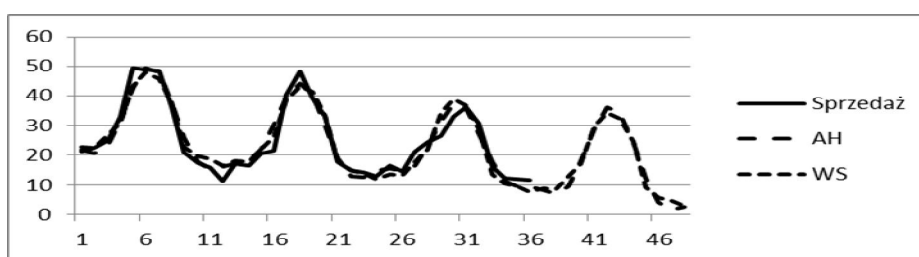
Wyraźnie dominuje trzecia harmoniczna (okres roczny) i w mniejszym stopniu harmoniczna szоста (okres półroczny). Pozostałe harmoniczne nie mają większego wpływu.

Tabela 12 przedstawia prognozy na pierwsze półrocze czwartego roku.

Tab. 12. Prognozy na pierwsze półrocze czwartego roku

Miesiąc	37	38	39	40	41	42
Model liniowy	18,05	17,68	17,30	16,93	16,55	16,17
Wskaźniki sezonowości	9,09	8,76	13,09	17,13	29,69	34,33
Analiza harmoniczna	8,27	7,07	9,62	17,93	28,97	36,09

Rysunek 6 przedstawia sprzedaż maślanki (linia ciągła), oraz wartości teoretyczne (prognozy wygasłe) oraz prognozowane na cały kolejny rok.



Rys 6. Sprzedaż maślanki: szereg czasowy oraz prognozy

Widoczne jest dobre dopasowanie modeli do danych rzeczywistych. Dla modelu liniowego średni błąd ex post prognoz wygasłych wynosi około 11. Dla analizy harmonicznej jest on na poziomie 2,97 a dla modelu ze wskaźnikami sezonowości jest równy 2,99.

4. Wnioski

Metody ilościowe zdobywają coraz większą popularność w planowaniu produkcji. Techniki analizy szeregów czasowych dostarczyć mogą wielu informacji kadrze zarządzającej. Przedstawione, wybrane techniki prognozowania stosowane być mogą w odniesieniu do dowolnych wyrobów. Metoda wskaźników sezonowości oraz analiza harmoniczna dostarczyć mogą wiele informacji na temat periodyczności analizowanych zjawisk. Szczególnie produkcja wyrobów branży spożywczej charakteryzują się często wahaniami sezonowymi. Omawiane techniki są proste z punktu widzenia ich implementacji. Obliczenia do prezentowanego artykułu wykonano w programie MS Excel. Istnieją również specjalistyczne programy przeznaczone do analizy danych oferujące gotowe procedury wyliczające wskaźniki sezonowości oraz realizujące analizę harmoniczną.

Prognozowanie wielkości sprzedaży dostarcza cennych informacji w procesie podejmowania decyzji. W dłuższej perspektywie oprócz obserwacji i analizy szeregów czasowych konieczny jest rozwój oparty na innowacyjności. Wymaga to analizy stanu innowacyjności przedsiębiorstwa oraz intensywnych działań związanych z komercjalizacją nowych wyrobów [5,6]. Uwzględniając obecnie obowiązujące przepisy działania te muszą zachowywać wysokie standardy ekologiczne odnośnie wpływu wyrobów na środowisko co może być mierzone z wykorzystaniem metodyki LCA [7]. Techniki te w połączeniu z analizą szeregów czasowych przynieść mogą wiele korzyści przedsiębiorstwom.

Literatura

1. Strategia rozwoju Województwa Świętokrzyskiego do roku 2020, http://www.rpo-swietokrzyskie.pl/data/Pliki/92_Strategia_Rozwoju_Wojew_dztwa_wi_tokrzyskie.pdf
2. Zeliaś A., Pawełek B, Wanat S.: Prognozowanie ekonomiczne, teoria, przykłady, zadania. PWN, Warszawa, 2003.
3. Radzikowska B. (red.): Metody prognozowania. Zbiór zadań. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław, 2004.
4. Maciąg A., Pietroń R., Kukła S.: Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie. PWE, Warszawa, 2013.
5. Kaczmarska B., Gierulski W., (2012 A), Methodology for Evaluating Organization Development State. An Application of the DEA Method, LAP Lambert Academic Publishing, Germany, ISBN 978-3-659-22975-6.
6. Kaczmarska B., Gierulski W., (2013 B), Innovative environment for business development, w: Innovations and Knowledge Commercialization. Cooperative Resources, Integrated Science and Business, red. D. M. Trzmielak, J. Ropęga, Centrum Transferu Technologii, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź s. 95-106.
7. Kaczmarska B., Gierulski W., (2014 A), Designing Innovative Products in Terms of LCA, Structure and Environment, Architecture, Civil Engineering, Environmental and Energy, No. 2/2014, vol. 6, s. 48-55; http://sae.tu.kielce.pl/19/S&E_NR_19.pdf

Dr hab. Artur MACIĄG, prof. PŚk
Katedra Informatyki i Matematyki Stosowanej
Politechnika Świętokrzyska
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa polskiego 7
tel./fax: (0-41) 342 43 62
e-mail: maciag@tu.kielce.pl